

CONTROLE CONTINUE N° 1

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviennent pour une partie importante dans l'appréciation de la copie

Exercice 1

- a) Enoncer le théorème de Rolle
- b) Enoncer le théorème de Taylor
- c) Montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy

Problème 1

1) Soit la suite réelle définie par: $U_n = a(9)^n + b(2)^n + c(-1)^n$ où $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^*)^3$.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$

- 2) On considère la fonction f définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $[a, b]$ avec $a < b$. On suppose que f est continue et monotone sur $[a, b]$ et on définit la suite récurrente (U_n) par :

$$\begin{cases} U_0 \in [a, b] \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- a) En supposant que f est croissante, déterminer la monotonie de la suite (U_n) suivant le signe de $U_1 - U_0$.
- b) Montrer que la suite U_n converge vers la solution de $f(x) = x$.

- 3) Considérons la suite suivante :

$$U_0 = 4; \quad U_{n+1} = \frac{4U_n + 5}{U_n + 3} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \text{Calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$$

Problème 2

1) Soit $f(x) = (x^2 - 1)^n$ $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Montrer que l'on a: $(x^2 - 1)f'(x) = 2nx f(x)$

b) En déduire que $(x^2 - 1)f^{(n+2)}(x) + 2xf^{(n+1)}(x) - n(n+1)f^{(n)}(x) = 0$

2) Soit $f(x) = \ln(1+x)$

- a) calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$

b) calculer $f^{(n)}(x)$

c) donner le développement de Taylor Mac Laurin de $f(x)$ au voisinage de 0.

d) soit la suite de terme général $U_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\cos(x) \right]^{\left(\frac{1}{x^2} \right)}$

4) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que: $e^x - x - 1 > 0 \quad \forall x > 0$

5) soit $f(x) = |x|^{x^2}$

a) Donner le domaine de définition de f

b) Montrer que f peut être prolongée par continuité au point 0

c) Donner $f'(x)$

d) Donner le tableau de variations de $f(x)$

Exercice 1

- a/ f cont sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$ alors $\exists c \in]a, b[: f'(c) = 0$
- b/ f n fois dérivable sur $[a, b]$ alors $\exists \theta \in]a, b[$ /

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)^1}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\theta)$$
- c/ soit $\varepsilon > 0$ $\exists N > 0$ / $\forall n > N$ $|U_n - l| < \varepsilon/2$
 $\exists N > 0$ / $\forall n > N, \forall m > N : |U_m - U_n| = |(U_m - l) - (U_n - l)| \leq |U_m - l| + |U_n - l| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Problème 1 1/ $U_n = a 9^n + b 2^n + c (-1)^n$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{a 9^{n+1} + b 2^{n+1} + c (-1)^{n+1}}{a 9^n + b 2^n + c (-1)^n} = \frac{9^{n+1} (a + b (\frac{2}{9})^{n+1} + c (-\frac{1}{9})^{n+1})}{9^n (a + b (\frac{2}{9})^n + c (-\frac{1}{9})^n)} = 9 \cdot \frac{a + b (\frac{2}{9})^{n+1} + c (-\frac{1}{9})^{n+1}}{a + b (\frac{2}{9})^n + c (-\frac{1}{9})^n}$$

$$0 < \frac{2}{9} < 1 \quad \text{et} \quad -1 < -\frac{1}{9} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2}{9})^n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{1}{9})^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 9$$

2/ Si $U_n - U_0 > 0$ car $U_n > U_0$ alors $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} > U_n$ (U_n) croissante

En effet : Pour $n=0$ $U_n > U_0$ vérifie
 Supposons $U_{n+1} > U_n$ or f croissante alors $f(U_{n+1}) > f(U_n)$

car $U_{n+2} > U_{n+1}$

Si $U_n - U_0 < 0$ car $U_n < U_0$ alors $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} < U_n$ (U_n) décroissante

Même démonstration par récurrence

b/ f définie $\text{de } [a, b] \text{ vers } [a, b]$ d'où $f([a, b]) \subset [a, b]$

• $U_0 \in [a, b]$; fermée sur $[a, b]$

• $\forall n \in \mathbb{N} : a \leq U_n \leq b$ (par récurrence)

• (U_n) monotone et bornée donc convergente vers l et $l = f(l)$

car l solution de l'équation $f(x) = x$

3/ $U_0 = 4$ $U_{n+1} = \frac{4U_n + 5}{U_n + 3}$ $f(x) = \frac{4x+5}{x+3}$ $f'(x) = \frac{2}{(x+3)^2} > 0 \Rightarrow f$ croissante

• $U_n = \frac{4U_0 + 5}{U_0 + 3} = \frac{19}{7} < U_0$ donc (U_n) décroissante

• $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_n \leq 4$

• f continue sur $[0, 4]$ et $f([0, 4]) \subset [0, 4]$ donc (U_n) converge vers l / $l = f(l)$
 $l = \frac{4l+5}{l+3} \Rightarrow l^2 - l - 5 = 0 \Rightarrow l = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$

Probleme 2 1/ $f(x) = (x^2 - 1)^n$

a/ $f'(x) = n(2x)(x^2 - 1)^{n-1} \Rightarrow (x^2 - 1)f'(x) = 2nx(x^2 - 1)^n \Rightarrow (x^2 - 1)f'(x) = 2nx f(x)$

b/ utilisons la formule de Leibnitz : $[(x^2 - 1)f'(x)]^{(n)} = [2nx f(x)]^{(n)}$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k (x^2 - 1)^{(k)} (f'(x))^{(n-k)} = 2n \sum_{k=0}^n C_n^k (x)^{(k)} (f(x))^{(n-k)}$$

$$(x^2 - 1)(f'(x))^{(n)} + n(2x)(f'(x))^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot (f'(x))^{(n-2)} = 2n \left(x(f(x))^{(n)} + n(f(x))^{(n-1)} \right)$$

$$(x^2 - 1)f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 2nx f^{(n)}(x) + 2n^2 f^{(n-1)}(x)$$

$$(x^2 - 1)f^{(n+1)}(x) - n(n+1)f^{(n-1)}(x) = 0$$

on remplace n par $n+1$ et on obtient : $(x^2 - 1)f^{(n+2)}(x) - (n+1)(n+2)f^{(n)}(x) = 0$

2/ $f(x) = \ln(1+x)$ a/ $f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ $f''(x) = (-1)(1+x)^{-2}$ $f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$

b/ $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (1+x)^{-n} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n}$

c/ $f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta)$; $0 < \theta < x$

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+\theta)^n} \cdot \frac{1}{n+1}$$

d/ Pour $x=1$ on a $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta)^n}$; $0 < \theta < 1$

On a $|U_n - \ln 2| = \frac{1}{(n+1)(1+\theta)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\lim U_n = \ln 2$

3/ $\cosh \frac{1}{n^2} = e^{\ln \cosh \frac{1}{n^2}} = e^{\frac{\cosh \frac{1}{n^2} - 1}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1/2}$ car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sinh x}{\cosh x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{2x \cosh x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x}{2 \cosh x} = \frac{1}{2}$

4/ $f(x) = e^x$ est sur $[0, x]$ dérivable sur $]0, x[$ donc $\exists \theta \in]0, x[$ tel que

$$f(x) - f(0) = (x-0)f'(\theta) \text{ car } e^x - 1 = x e^\theta$$

$$0 < \theta < x \Rightarrow 1 < e^\theta < e^x \Rightarrow x < x e^\theta < x e^x \Rightarrow x < e^x - 1 < x e^x \Rightarrow e^x - 1 > 0$$

5/ $f(x) = |x|^x = e^{x \ln |x|}$ a/ $x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| > 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow f = |x|^x$

b/ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln |x|} = e^{0 \times 0} = 1$ donc f peut être prolongée

c/ $f'(x) = (x^2 \ln |x|)' f(x) = (2x \ln |x| + x^2 \cdot \frac{1}{x}) f(x) = x(2 \ln |x| + 1) f(x)$

d/ $2 \ln |x| + 1 = 0 \Rightarrow \ln |x| = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm e^{-1/2}$

x	$-e^{-1/2}$	0	$e^{-1/2}$
$2 \ln x + 1$	$+$	0	$-$
f'	$-$	0	$+$



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..